Rappelle : pour les tests, si absents aux DS ou Partiel, il vous faut un certificat medicale, ou sinon la note est 0. Si vous avez deux absences, l'examen n'est pas validé et il faudra attendre le rattrapage en juin.
- Si vous êtes étudiants-travailleurs, il faut le declarer à la sécretarie.

Équations polynomiales

$P \in \mathbb{C}[z]$ polynôme à coefficients complexes.

$P(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $a_d \neq 0$, $d =$ degré de P.

On veut trouver les solutions des équations de la forme $P(z) = 0$.

- Degré 0 : $P(z) = a = 0$ c'est vraie pour tout z si $a = 0$ ($\deg P = -\infty$)
  n'admet pas de solution si $a \neq 0$.

Degré 1 : $P(z) = az + b$, $a \neq 0$.

Prop : L'équation (∗1) $az + b = 0$ admet une unique solution
$a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

$z_1 \in \mathbb{C}$, donnée par $z_1 = -\frac{b}{a}$.

Preuve : $az + b = 0 \iff az = -b \iff z = -\frac{b}{a}$. □

Rmq : Soit $P(z) = az + b$ et $z_1 = -\frac{b}{a}$ la solution de $P(z) = 0$. Alors on peut écrire $P(z) = a(z - z_1)$. En effet $az + b = a\left(z + \frac{b}{a}\right) = a(z - z_1)$.

Rmq : On aurait pu proceder comme suit.

- On montre que $z_1 = -\frac{b}{a}$ est une solution de (∗1) :

$$a z_1 + b = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0. \quad \text{ok}$$

- On montre que z_1 est l'UNIQUE solution.

Supposons que z_2 est une autre solution : donc $a z_2 + b = 0$.

$P(z) = a(z - z_1) \Rightarrow 0 = P(z_2) = a(z_2 - z_1)$. Comme $a \neq 0 \Rightarrow z_2 = z_1$ □

Degré 2 : (*2) $az^2+bz+c=0$, $a\in\mathbb{C}^*$, $b,c\in\mathbb{C}$.

Dans les réels : $ax^2+bx+c=0$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b,c\in\mathbb{R}$.

On calcule le <u>discriminant</u> $\Delta=b^2-4ac$.

Si $\Delta>0$, les solutions sont $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta=0$, les solutions ~~sont~~ est $x=\dfrac{-b}{2a}$.

Si $\Delta<0$, il n'y a pas de solutions $x\in\mathbb{R}$, car on ne peut pas calculer la racine d'un nombre négatif.

Dans les complexes, la situation est analogue, et en plus on pourrait calculer les racines carrées de n'importe quel nombre complexe.

Proposition : Les solutions complexes de (*2) sont données par :
$$z=\frac{-b\pm\delta}{2a},\quad \text{avec } \delta\in\mathbb{C} \text{ tel que } \delta^2=\Delta:=b^2-4ac.$$

Δ est dit le <u>discriminant</u> de (*2)

Rmq : Dans la littérature étrangère, parfois on trouve $\delta=\sqrt{\Delta}$ même si $\Delta\notin\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dans ce cas $\delta=\sqrt{\Delta}$ est n'importe quelle solution $\in\mathbb{C}$ de $\delta^2=\Delta$.

Pour nous $\sqrt{\Delta}$ seulement si $\Delta\geq 0$, et $\sqrt{\Delta}\geq 0$.

Preuve : on procède par la "méthode de complétion du carré".

On veut écrire az^2+bz+c sous la forme $a(z-d)^2-e$, de façon que $a(z-d)^2-e=0 \rightsquigarrow (z-d)^2=\frac{e}{a}$.

On impose $az^2+\boxed{bz}+c = a(z-d)^2-e = az^2\boxed{-2adz}+ad^2-e$.

$\rightsquigarrow b=-2ad \rightsquigarrow d=-\frac{b}{2a}$, et $c=ad^2-e \rightsquigarrow e=ad^2-c=\frac{\cancel{a}b^2}{4a^{\cancel{2}}}-c=\frac{b^2-4ac}{4a}=\frac{\Delta}{4a}$.

Donc $az^2+bz+c=0 \iff a\Big(\underbrace{z-\left(-\frac{b}{2a}\right)}_{\overset{\shortparallel}{w}}\Big)^2=\frac{\Delta}{4a} \rightarrow w^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ cas $(2aw)^2=\Delta$.

Soit δ t.q. $\delta^2=\Delta$ alors $(2aw)^2=\delta^2$. Des solutions sont données par

$2aw = \pm\delta \rightsquigarrow w = \frac{\pm\delta}{2a}$, Mais $w = z - \left(-\frac{b}{2a}\right)$

$z = w - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \delta}{2a}$ □

Rmq: Soient $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$. Alors:

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

En effet: $a(z-z_1)(z-z_2) = az^2 - az(z_1+z_2) + az_1z_2$.

$\boxed{z_1+z_2} = \frac{-b+\delta-b-\delta}{2a} = \boxed{-\frac{b}{a}}$ $\boxed{z_1z_2} = \frac{(-b+\delta)(-b-\delta)}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta^2}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \boxed{\frac{c}{a}}$.

Corollaire: z_1 et z_2 sont les seules solutions de $(*2)$:

Si z_3 est une autre solution, alors $a(z_3-z_1)(z_3-z_2)=0 \Rightarrow z_3 = z_1$ ou $z_3 = z_2$.

Rmq: Si $\Delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$ et $z_1 = z_2$. Dans ce cas $az^2+bz+c = a(z-z_1)^2$.

On dit que z_1 est une solution de <u>multiplicité 2</u> de $(*2)$.

Comment trouver les racines carrées d'un nombre complexe?

~~[illegible]~~ Exemple:

$p(z) = z^2 + 2z + 3$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\cdot 3 = -8$.

Je cherche δ tel que $\delta^2 = \Delta = -8 = (-1)\cdot 8$. On sait que $i^2 = -1$.

Donc $\delta = \pm i 2\sqrt{2}$ est tel que $\Delta^2 = (\pm i 2\sqrt{2})^2 = i^2 \cdot 8 = -8$.

Il s'en suit que $z = \frac{-b \pm \delta}{2a} = \frac{-2 \pm (2\sqrt{2})i}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$ sont les solutions.

Exemple: $p(z) = z^2 + 2z + 1 + i = 0$. $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1+i) = -4i$.

Quelles sont les solutions de $\delta^2 = -4i$?

Racines carrées.

$w \in \mathbb{C}$, on veut trouver les solutions complexes de $z^2 = w$.

Méthode exponentielle.

Écrivons $z = re^{i\alpha}$ $\quad w = se^{i\beta}$.

C2-4

$z^2 = w \iff r^2 e^{2i\alpha} = s e^{i\beta} \iff \begin{cases} r^2 = s & (\geq 0) \\ 2\alpha \equiv \beta \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{s} \\ \alpha \equiv \frac{\beta}{2} \pmod{\pi} \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha \equiv \begin{cases} \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} + \pi \end{cases} \pmod{2\pi}.$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\beta}{2}} \quad z_2 = \sqrt{s}\, e^{i\left(\frac{\beta}{2}+\pi\right)} = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\beta}{2}} \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} = -\sqrt{s}\, e^{i\frac{\beta}{2}} = -z_1.$

Plus utile si ~~on~~ connaît $\cos\frac{\beta}{2}$ et $\sin\frac{\beta}{2}$...

Méthode cartésienne

Écrivons $z = x+iy$, $w = u+iv$

$z^2 = w \iff (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy = u+iv. \iff \begin{cases} x^2-y^2 = u \\ 2xy = v \end{cases}$

De plus : $|z|^2 = x^2+y^2 = |w| \quad \left(= \sqrt{u^2+v^2}\right).$ Donc

$\begin{cases} x^2-y^2 = u \\ x^2+y^2 = |w| \\ 2xy = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = u+|w| \\ 2y^2 = |w|-u \\ 2xy = v \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \pm\sqrt{\frac{|w|+u}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{|w|-u}{2}} \end{matrix}$

$\Rightarrow$ pour déterminer la concordance des signes.

Exemples $w = -8 = u$, $v = 0$, $|w| = 8$ $\quad z = x+iy.$

Méthode cartésienne : $\begin{cases} x^2-y^2 = -8 \\ x^2+y^2 = 8 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 0 \\ 2y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2\sqrt{2}. \end{cases}$

$\Rightarrow z = \pm i\, 2\sqrt{2}.$

Méthode exponentielle : $w = -8 = 8 e^{i\pi} \Rightarrow z_1 = \sqrt{8}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}\, i \qquad z_2 = -z_1 = -2\sqrt{2}\, i \left(= \sqrt{8}\, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

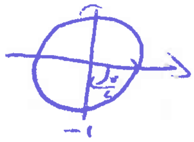
Exemples $w = -i = \overset{u}{0} + i\overset{v}{(-1)}$. $|w| = 1$. $z = x+iy$. Méthode cartésienne

$\begin{cases} x^2-y^2 = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ 2y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \qquad z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$

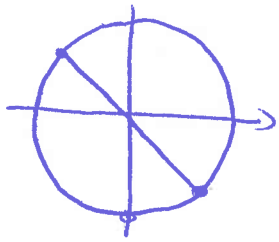
Comme $xy < 0$, les signes sont discordants

Méthode exponentielle : $w = -i = 1 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}$



$z = re^{i\alpha}$. $\quad r^2 e^{i2\alpha} = 1 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1} = 1 \\ \alpha \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi} \end{cases}$

$\rightarrow \alpha = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \\ \frac{3}{4}\pi \end{cases} \pmod{2\pi}$

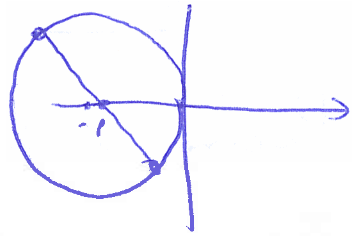


$\rightarrow z_1 = e^{-\frac{\pi}{4}i} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc : $z^2 + 2z + 1 + i = 0$ a comme solutions : $(z+1)^2 + i = 0 \rightarrow z = -1 \pm \delta \mid \delta^2 = -i$

$\Rightarrow z = -1 \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{cases} -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.



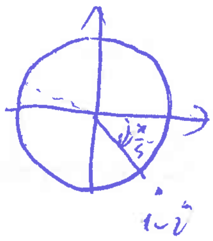
Exemple : Calculer les racines carrées de $w = 1 - i$.

Méthode cartésienne : $|w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. $\quad z = x + iy \quad z^2 = w \Rightarrow$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{2}+1 \\ 2y^2 = \sqrt{2}-1 \\ 2xy = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2xy = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ y^2 = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{cases}$

signes discords

Méthode exponentielle : $w = \sqrt{2}e^{i\beta}$, avec $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



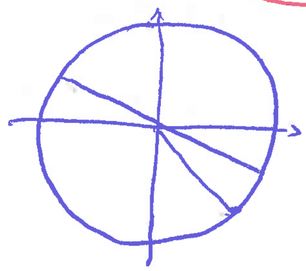
$\rightarrow \beta = -\frac{\pi}{4}$. $\qquad z = re^{i\alpha}$: $\quad z^2 = w \Rightarrow$

$\begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ 2\alpha \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \alpha \equiv -\frac{\pi}{8} \pmod{\pi} \end{cases} \rightarrow \alpha = \begin{cases} -\frac{\pi}{8} \\ -\frac{\pi}{8} + \pi \end{cases} \pmod{2\pi}$

C2-6

Donc. $z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = \sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8} - i\sqrt[4]{2}\sin\left(+\frac{\pi}{8}\right)$.

$z_2 = -z_1$



Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, ce z_1 correspond au z_1 trouvé avec la méthode cartésienne. On obtient.

$$\sqrt[4]{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \to \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\underbrace{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}_{\sqrt{2\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \to \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Racines n-ièmes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut résoudre l'équation $z^n = w$ pour un $w \in \mathbb{C}$ donné.

Méthode exponentielle: $w = s e^{i\beta}$, $z = r e^{i\alpha}$.

$$z^n = (re^{i\alpha})^n = r^n e^{in\alpha} = s e^{i\beta} = w$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^n = s \\ n\alpha \equiv \beta \pmod{2\pi} \end{cases} \to \begin{cases} r = \sqrt[n]{s} \\ \alpha \equiv \frac{\beta}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{s} \\ \alpha = \frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

$\boxed{n \text{ racines}}$

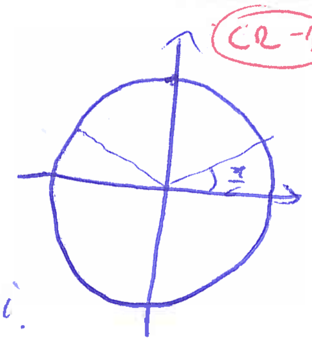
avec $k \in \mathbb{Z}$ (ou $k = \{0, \ldots, n-1\}$, car pour $k = n$, $\frac{2k\pi}{n} = 2\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}$).

Exemple: Racines troisièmes de $w = 8i$

$w = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$. Si $z = re^{i\alpha}$, $z^3 = w$, on a.

$$z = \sqrt[3]{8}\, e^{i\alpha} = 2e^{i\alpha} \text{ avec } \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \ (k \in \mathbb{Z})$$

CR-7



$k=0$: $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}+i$

$k=1$, $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3}+i$.

$\frac{5}{6}\pi$

$k=2$: $z_2 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2i$.

$\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$

Pour $k=3$, $\frac{\pi}{6} + \frac{6}{3}\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

Il n'y a que 3 solutions distinctes.

Rmq : $z_0\cdot z_1\cdot z_2 = -2i(\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}+i) = +8i$

$z_0+z_1+z_2 = -2i + \sqrt{3}+i - \sqrt{3}+i = 0$.

On verra que ce sont des faits généraux.

Racines n-ièmes de l'unité

Résoudre $z^n = 1$. $1 = 1\cdot e^0$.

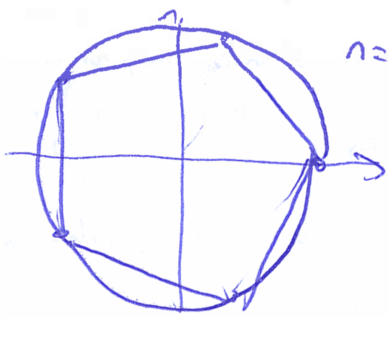
→ les solutions sont $z_k = e^{\frac{2\pi k}{n}i} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$ $k\in\mathbb{Z}$

On a vu que si $k_1-k_2\in n\mathbb{Z} \Rightarrow z_{k_1} = z_{k_2}$:

En fait $k_1-k_2 = \ell n \Rightarrow \frac{2\pi k_1}{n} = \frac{2\pi(k_2+\ell n)}{n} = \frac{2\pi k_2}{n} + 2\pi\ell \equiv \frac{2\pi k_1}{n} \pmod{2\pi}$.

Donc il y a n racines distinctes.

Elles forment un n-gone régulier circonscrit par le cercle de rayon 1, et 1 est un ~~[illegible]~~ sommet.



Rmq! Si η est une racine (n-ème) de 1 $\Rightarrow$ η^k est une racine de 1 $\forall k \in \mathbb{Z}$

$(\eta^k)^n = \eta^{kn} = (\eta^n)^k = 1^k = 1.$

Définition: Une racine n-ème η de 1 est dite primitive si

$\eta^m \neq 1 \ \forall 0 < m < n.$

Exemple ; les racines 4-èmes de 1 sont ; $z_0 = 1$, $z_1 = i$ $z_2 = -1$, $z_3 = -i$.

$1^1 = 1 \Rightarrow 1$ n'est pas primitive

$i \neq 1$, $i^2 = -1 \neq 1$, $i^3 = -i \neq 1 \Rightarrow i$ est primitive.

-1 n'est pas primitive ; $(-1)^2 = 1$. , $-i$ l'est.

Proposition: Une racine n-ème η de l'unité est primitive si et seulement si toutes les racines n-èmes de l'unité sont données par $S_\eta := \{\eta^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(ou $1 - k \in \{0, \dots, n-1\}$ $\in \{1, \dots, n\}$)

Preuve: ($\Rightarrow$) Soit η primitive. On veut montrer que $\eta^h \neq \eta^k$ $\forall 0 \leq h < k < n$. Si c'est le cas, S_η contient au moins n éléments distincts. Comme on sait que les racines n-èmes de 1 sont exactement n, on conclut.

Supposons par l'absurde que $\exists 0 \leq h < k < n$ t.q. $\eta^h = \eta^k$. Alors $1 \leq k-h < n$ et $\eta^{k-h} = 1$, en contradiction avec η primitive.

($\Leftarrow$) Par absurde, supposons S_η contient toutes les racines, mais η pas primitive, c'est à dire $\exists 0 < m < n \mid \eta^m = 1$.

Mais alors $\eta^{h+m} = \eta^h \cdot \eta^m = \eta^h \cdot 1 = \eta^h$ $\forall h$. Il s'en suit que S_η a au plus $m < n$ éléments distincts, donc S_η ne contient pas toutes les racines; contradiction $\square$

Exemples dans l'exemple précédent:

$S_1 = \{1\}$

$S_i = \{i, -1, -i, 1\}$ pas primitives.

$S_{-1} = \{-1, 1\}$

$S_{-i} = \{-i, -1, i, 1\}$ primitives

Exercice: Calculer les racines primitives et non, 6-èmes de 1.

Rmq: $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ et $e^{-\frac{2\pi i}{n}} = \overline{e^{\frac{2\pi i}{n}}}$ sont toujours racines n-èmes primitives.

Rmq: Soit $w \in \mathbb{C}$, et z_0 une racine n-ème de w.

Alors toutes les racines n-èmes de w sont de la forme $z_0 \cdot \eta$, où η varie parmi les racines n-èmes de 1.

En fait, si $z_0^n = w \Rightarrow (z_0\eta)^n = z_0^n \cdot \eta^n = w \cdot 1 = w$. J'en ai obtenues n, donc OK.

Si en plus η est primitive, toutes les racines n-èmes de w sont de la forme $z_0\eta^k$, $k = 0 \dots n-1$.

Exemple: On calcule les racines 6-èmes de $8i$.

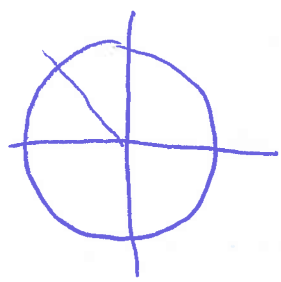
En forme exponentielle $z^6 = 8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i} \rightsquigarrow z = re^{i\alpha}$ $r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6}$.

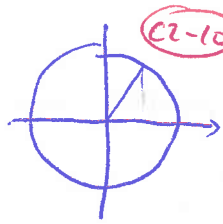
$z_0 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12}i}$ $z_1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{5\pi}{12}i}$ $z_2 = \sqrt{2}\, e^{\frac{9\pi}{12}i} = e^{\frac{3}{4}\pi i}$ $z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{13\pi}{12}i} = -z_0$ $z_4 = \sqrt{2}\, e^{\frac{17\pi}{12}i} = -z_1$ $z_5 = \sqrt{2}\, e^{\frac{21\pi}{12}i} = -z_2$

Or, on connait $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = -1 + i$

$z_5 = 1 - i$,





D'autre part, $\eta = e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il s'en suit que $z_0 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{12}i} = \underbrace{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{21}{12}i}}_{z_5} \cdot \underbrace{e^{\frac{\pi}{3}i}}_{\eta} = (1-i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\| $$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Donc $(1-i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ et

$$\underbrace{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}_{\| \, \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Re} z_0} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \underbrace{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}_{\| \, \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Im} z_0} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Propriétés des racines n-ièmes.

Théorème : soit $w \in \mathbb{C}$, et $z_1 \dots z_n$ les racines n-ièmes de w.

Alors $$z^n - w = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

Idée de la preuve : si $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ et z_0 est une solution de $p(z_0) = 0$ alors $(z - z_0) \mid p(z)$. On procède alors par récursion sur le degré du polynôme.

Corollaire : Soit $w \in \mathbb{C}$ et $z_1 \dots z_n$ ses racines n-ièmes. On a

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^{n+1} w \qquad \sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

Preuve du corollaire. $z^n - w = \prod (z - z_k)$.

Le terme de degré 0 donne $-w = \prod_{k=1}^{n} (-z_k) \to \prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^{n+1} w$.

Le terme de degré $n-1$ donne $0 = -\sum_{k=1}^{n} z_k$. □

Preuve directe du corollaire

Si $w = se^{i\beta}$, $z_k = \sqrt[n]{s}\, e^{i\frac{\beta+2k\pi}{n}}$.

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} z_k = (\sqrt[n]{s})^n \cdot e^{i\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta+2k\pi}{n}} = se^{i\beta} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n} k} = w \cdot e^{\frac{2\pi(n+1)}{2}} = w \cdot (-1)^{n+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour la somme : soit $S = \sum_{k=1}^{n} z_k$. et $\eta = e^{\frac{2\pi i}{n}} \neq -1$ racine primitive de 1.

On a $S = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \eta z_k = \eta S$. $\Rightarrow S(\underbrace{\eta - 1}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow S = 0$ □

Théorème (fondamental de l'algèbre, ou de d'Alembert-Gauss).
Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ non constant admet au moins une solution $z \mid P(z) = 0$.

Corollaire. Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ admet exactement $n = \deg P$ solutions (comptées avec multiplicités), et $P(z) = a\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$, avec $\{z_k\}$ ces solutions.